

**مبرهن:** ليكن  $A$  جبر فوق الحلقين التبادليين والواحد  $A$  و  $n \in \mathbb{N}$  وليكن  $d: A \rightarrow A$  دالة تفاضل على  $A$  و

$$d^n(x, y) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} d^r(x) \cdot d^{n-r}(y)$$

**البرهان:** بالأسقراء حسب  $n$

من أجل  $n=1$

$$d(x, y) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y)$$

$$\sum_{r=0}^1 \binom{1}{r} d^r(x) \cdot d^{1-r}(y) = \binom{1}{0} d^0(x) \cdot d^1(y) + \binom{1}{1} d^1(x) \cdot d^0(y) = x \cdot d(y) + d(x) \cdot y$$

نقول ان هذا هو المطلوب

$$d^K(x, y) = \sum_{r=0}^K \binom{K}{r} d^r(x) \cdot d^{K-r}(y)$$

ولنكن  $n = K+1$  من أجل  $K+1$  ليكن

$$d^{K+1}(x, y) = \sum_{r=0}^{K+1} \binom{K+1}{r} d^r(x) \cdot d^{K+1-r}(y)$$

$$d^{K+1}(x, y) = d[d^K(x, y)] = d\left[\sum_{r=0}^K \binom{K}{r} d^r(x) \cdot d^{K-r}(y)\right]$$

$$= \sum_{r=0}^K \binom{K}{r} d(d^r(x) \cdot d^{K-r}(y))$$

$$= \sum_{r=0}^K \binom{K}{r} [d^{r+1}(x) \cdot d^{K-r}(y) + d^r(x) \cdot d^{K-r+1}(y)]$$

$$= \sum_{r=0}^K \binom{K}{r} d^{r+1}(x) \cdot d^{K-r}(y) + \sum_{r=0}^K \binom{K}{r} d^r(x) \cdot d^{K-r+1}(y)$$

$$= d^{K+1}(x, y) + \sum_{r=0}^{K-1} \binom{K}{r} d^{r+1}(x) \cdot d^{K-r}(y)$$

$$= d^{K+1}(x, y) + \sum_{r=0}^{K-1} \binom{K}{r} d^{r+1}(x) \cdot d^{K-r}(y)$$



$$+ 2 d^{K+1}(y) + \sum_{r=1}^K \binom{K}{r} d^r(x) d^{K-r+1}(y)$$

بالنسبة للصيغة الأولى فنلاحظ أن

$$r+1 = t \quad \text{حيث أن} \quad t = r+1$$

$$= \sum_{r=0}^{K-1} \binom{K}{r} d^{r+1}(x) d^{K-r}(y) = \sum_{t=1}^K \binom{K}{t-1} d^t(x) d^{K-t+1}(y)$$

لنستعمل الآن  $r=t$  في

$$\sum_{r=0}^{K-1} \binom{K}{r} d^{r+1}(x) d^{K-r}(y) = \sum_{r=1}^K \binom{K}{r-1} d^r(x) d^{K-r+1}(y)$$

$$d^{K+1}(x \cdot y) = (d^{K+1}(x) \cdot y + x \cdot d^{K+1}(y)) + \sum_{r=1}^K \left[ \binom{K}{r} + \binom{K}{r-1} \right] d^r(x) d^{K-r+1}(y)$$

$$\bullet \binom{K}{r} + \binom{K}{r-1} = \frac{K!}{r!(K-r)!} + \frac{K!}{(r-1)!(K-r+1)!}$$

$$= \frac{K!}{(r-1)!(K-r)!} \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{K-r+1} \right] = \frac{K!}{(r-1)!(K-r)!} \left[ \frac{r+(K-r+1)}{r(K-r+1)} \right]$$

$$= \frac{K!}{(r-1)!(K-r)!} \left[ \frac{K+1}{r(K-r+1)} \right] = \frac{(K+1)!}{r!(K-r+1)!} = \binom{K+1}{r}$$

$$d^{K+1}(x \cdot y) = (d^{K+1}(x) \cdot y + x \cdot d^{K+1}(y)) + \sum_{r=1}^K \binom{K+1}{r} d^r(x) d^{K+1-r}(y)$$

$$= \sum_{r=0}^{K+1} \binom{K+1}{r} d^r(x) d^{K+1-r}(y)$$



**تعرّف:** ليكن  $A$  حيزاً متوفراً الخلقات  $R$  و  $d_1, d_2$  تطييفاً استيفافاً  
 صرمين على  $A$  عن نتيقات  
 هو تطييف استيفاف على  $A$

المحل

لدينا  $d_1 d_2 = d_2 d_1 : A \rightarrow A$  ليكن  $x, y \in A$  عن نتيقات

$$1) [d_1 d_2 - d_2 d_1](x+y) = d_1 d_2(x+y) - d_2 d_1(x+y) \\ = d_1(d_2(x+y)) - d_2(d_1(x+y))$$

$$= d_1(d_2 x + d_2 y) - d_2(d_1 x + d_1 y)$$

$$= d_1 d_2 x + d_1 d_2 y - d_2 d_1 x - d_2 d_1 y \\ = (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x) + (d_1 d_2 - d_2 d_1)(y)$$

$$2) \forall \alpha \in R : d_1 d_2(\alpha x) = d_1(d_2 \alpha x)$$

$$\forall \alpha \in R : [d_1 d_2 - d_2 d_1](\alpha x) = d_1(d_2(\alpha x)) - d_2(d_1(\alpha x))$$

$$= d_1[\alpha d_2(x)] - d_2(\alpha d_1(x)) = \alpha d_1 d_2(x) - \alpha d_2 d_1(x) \\ = \alpha(d_1 d_2 - d_2 d_1)(x)$$

$$3) [d_1 d_2 - d_2 d_1](x \cdot y) = d_1(d_2(x \cdot y)) - d_2(d_1(x \cdot y)) \\ = d_1(d_2(x \cdot y) - x d_2(y)) - d_2(d_1(x \cdot y) - x d_1(y))$$



$$= d_1(d_2(xy)) + d_1(xd_2(y)) = d_2(d_1(x)y) - d_2(xd_1(y))$$

$$= d_1d_2(xy) + d_2x \cdot d_1(y) + d_1x \cdot d_2(y) + x d_1d_2(y)$$

$$- d_2d_1(xy) - d_1(xd_2y) - d_2(xd_1y) - x d_2d_1(y)$$

$$= (d_1d_2(x) - d_2d_1(x))y + x(d_1d_2(y) - d_2d_1(y))$$

$$= (d_1d_2 - d_2d_1)x \cdot y + x(d_1d_2 - d_2d_1)(y)$$

$$\frac{1}{2} \text{ نلاحظ أن } d_1d_2 - d_2d_1 \text{ هي دالة اشتقاق}$$

$$\text{نلاحظ أن } d_1d_2 - d_2d_1 \text{ هي دالة اشتقاق}$$

**مبرهنة**: ليكن  $A$  حيز آ فوق الحلقة  $R$ ،  $\text{Der}(A)$  هو مجموعة  
اشتقاق حيز آ فوق  $R$  بالنسبة للعلاقة «الضرب الأيمن»

$$[;] : \text{Der}(A) \times \text{Der}(A) \rightarrow \text{Der}(A)$$

$$(d_1, d_2) \mapsto [d_1, d_2]$$

$$d_1, d_2 \in \text{Der}(A), \alpha \in R \text{ ليكن}$$

$$1) \quad \alpha [d_1, d_2] = [\alpha d_1, d_2] = [d_1, \alpha d_2]$$

$$\forall x' \in A \text{ و } \alpha [d_1, d_2](x) = \alpha(d_1d_2 - d_2d_1)(x)$$

$$= \alpha(d_1d_2(x) - d_2d_1(x)) = \alpha d_1d_2(x) - (\alpha d_2d_1)(x)$$

$$= d_1(\alpha d_2(x)) - (\alpha d_2)(d_1(x)) = d_1(\alpha d_2(x)) - (\alpha d_2)(d_1(x))$$

$$= (d_1(\alpha d_2) - (\alpha d_2)d_1)(x)$$



$$\alpha([d_1, d_2]) = [\alpha d_1, \alpha d_2]$$

نصف المبرهنات نرى ان

$$\alpha([d_1, d_2]) = [\alpha d_1, \alpha d_2]$$

ليكن  $d_1, d_2, d_3 \in \text{Der}(A)$

$$[d_1, d_2 + d_3] = [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$$

$$\forall x \in A: [d_1, d_2 + d_3](x) = [d_1, (d_2 + d_3)](x) = (d_2 + d_3)(d_1(x)) - d_1((d_2 + d_3)(x))$$

$$= d_1((d_2 + d_3)(x)) - (d_2 + d_3)(d_1(x))$$

$$= d_1(d_2(x) + d_3(x)) - (d_2 + d_3)(d_1(x)) = d_2(d_1(x)) + d_3(d_1(x)) - d_2(d_1(x)) - d_3(d_1(x))$$

$$= d_1(d_2(x) + d_3(x)) - (d_2 + d_3)(d_1(x)) = d_2(d_1(x)) + d_3(d_1(x)) - d_2(d_1(x)) - d_3(d_1(x))$$

$$= d_1 d_2(x) + d_1 d_3(x) - d_2 d_1(x) - d_3 d_1(x)$$

$$= (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x) + (d_1 d_3 - d_3 d_1)(x)$$

$$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_3](x)$$

$$([d_1, d_2] + [d_1, d_3])(x)$$

$$[d_1, d_2 + d_3] = [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$$

نصف المبرهنات نرى ان

$$[d_1 + d_2, d_3] = [d_1, d_3] + [d_2, d_3]$$



\* **دور لن:**  $R$  علاقات تبديلية وواحداية ، نقول عن الزمر  $(A, +)$  أنها حرة لن فوق  $R$  إذا حققت الشروط:

1-  $A$  حرة فوق  $R$ .

2- توجد عمليات ضرب داخلية

$$[, ] : A \times A \rightarrow A$$

$$(x, y) \mapsto [x, y]$$

فحق الشروط الآتية:

$$\bullet \forall x \in A, [x, x] = 0$$

$$\bullet \forall \alpha \in R, x, y \in A, \alpha [x, y] = [\alpha x, y] = [x, \alpha y]$$

$$\bullet \forall x, y, z \in A, [x, y+z] = [x, y] + [x, z]$$

$$[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$\bullet \forall x, y, z \in A,$$

$$[x, [y, z]] + [y, [x, z]] + [z, [x, y]] = 0$$

\* **تعريف:** نقول عن حرة لن  $A$  فوق  $R$  أنها حرة تبديلية

$$\forall x, y \in A, [x, y] = 0$$

\* **تعريف:** لن  $A, B$  حرة لن فوق الحلق  $R$  نقول عن  $f$  أنها

$$f: A \rightarrow B$$

$$\forall x, y \in A, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall \alpha \in R, x \in A, f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

$$\forall x, y \in A, f([x, y]) = [f(x), f(y)]$$



\* **تعريف:** لكي  $A$  هي لي فوق الحلقه  $R$ , نقول في العنصر

$e \in A$  انه صاير من اليمين اذا كان:

$$\forall x \in A, [x, e] = 0$$

\* **تعريفات:** لكي  $A$  هي لي فوق الحلقه  $R$  عندئذ:

$$1) \forall x, y \in A, [x, y] = -[y, x]$$

$$2) \forall x \in A, [x, 0] = 0$$

$$[x, [y, z]] = [y, [x, z]] + [z, [x, y]]$$

$$3) \forall x, y, z \in A, [x, [y, z]] + [y, [x, z]] + [z, [x, y]] = 0$$

البرهان:

1) لكي  $x, y \in A$  لنا

$$[x+y, x+y] = 0$$

$$[x+y, x] + [x+y, y] = 0$$

$$[x, x] + [y, x] + [x, y] + [y, y] = 0$$

$$[x, y] = -[y, x]$$

(2)

$$0 = [x, x] = [x, 0+x] = [x, 0] + [x, x] = 0$$

$$[x, 0] = 0$$

(3) راجع من التعريف

\* **تعريف:** لكي  $A$  هي لي فوق الحلقه  $R$  صاير من اليمين اذا كان:

الكه:

لكي  $A$  هي لي فوق الحلقه  $R$ , لكي  $e \in A$  عنده صاير من

اليمين

$$e = [e, e] = 0$$

عندئذ:

$$\forall x \in A, x = [x, e] = [x, 0] = 0$$

$$A = 0 \leftarrow$$



تطبيقات الاشتقاق على هيدرين :

تعريف: ليكن  $A$  هيدرين نسحيه التطبيق  $f$

تطبيق اشتقاق على  $A$  اذا حققت الشروط :

$$\forall x, y \in A \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in A \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

$$\forall x, y \in A \quad f([x, y]) = [f(x), f(y)] + [x, f(y)]$$

نقصد بمجموعة تطبيقات الاشتقاق المعرفة على هيدرين  $A$  بالترتيب :

$$\text{Der}(A)$$

انتهت المحاضرة

Oscar

~ ~ ~